"TOPOLOGISCHE FORTSETZUNG BIHOLOMORPHER FUNKTIONEN AUF DEM RANDE BEI BESCHRÄNKTER STRENG-PSEUDOKONVEXEN GEBIETEN IM $\mathbb{C}^n$ MIT C^∞- RAND "

DISSERTATION

zur Erlangung des Doktorgrades der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Norbert Vormoor
aus Vechta

Göttingen 1973

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41534919_0043

"Topologische Fortsetzung biholomorpher Funktionen auf dem Rande bei beschränkten streng-pseudokonvexen Gebieten im $\mathbb{C}^n$ mit C^∞-Rand "

Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Georg-August-Universität zu Göttingen

Vorgelegt von Norbert Vormoor aus Vechta

Göttingen 1973

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

D 7

Referent: Prof. Grauert
Koreferent: Prof. Deuring
Tag der mündlichen Prüfung: 15. Februar 1973

Inhaltsverzeichnis

Seite

Einleitung 2

§ 1 Das Verhalten des Randabstandes unter biholomorphen Abbildungen 3

§ 2 Verhalten der Caratheodory-Metrik am Rande 9

§ 3 Topologische Fortsetzung biholomorpher Funktionen auf dem Rande 22

Literaturverzeichnis 25

Abbildungen 26

Einleitung

Bekanntlich hat Herr Caratheodory schon 1912 gezeigt, daß man bei Jordanschen Gebieten in $\mathbb{C}$ stets biholomorphe Abbildungen topologisch auf den Rand fortsetzen kann. Die folgende Arbeit zeigt nun, daß dies auch bei hinreichend schönen Gebieten im $\mathbb{C}^n$ möglich ist, nämlich bei beschränkten streng-pseudokonvexen Gebieten mit C^∞-Rand.

Dazu zeigt man zuerst, daß der Randabstand unter biholomorphen Funktionen bei Gebieten $G \subset \mathbb{C}^n$ der oben genannten Art nicht zu sehr schwankt. Wir werden dann beweisen, daß durch verschieden starkes Anwachsen der Caratheodory-Metrik, abhängig vom Randabstand, genau zu entscheiden ist, ob zwei Folgen aus G gegen denselben oder gegen verschiedene Randpunkte konvergieren. Da die Caratheodory-Metrik invariant unter biholomorphen Abbildungen f ist und der Randabstand unter f nicht zu sehr schwankt, folgt, daß zwei Bildfolgen genau dann gegen den gleichen Randpunkt konvergieren, falls dies auch bei den Urbildfolgen der Fall ist.

Nun ist es leicht möglich, f durch den Limes der Bildfolgen auf $\overline{G}$ fortzusetzen und es ist klar, daß die Fortsetzung von f stetig auf $\overline{G}$ ist. Ebenso verfährt man mit f^{-1} und erhält, daß die Fortsetzung von f^{-1} gerade die Umkehrabbildung der Fortsetzung von f ist, mithin ist also die Fortsetzung von f topologisch auf $\overline{G}$.

Für die Anregung zu dieser Arbeit und für die vielen wertvollen Ratschläge bei der Bewältigung des Problems schulde ich meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. H. Grauert, großen Dank. Ebenso danke ich Herrn Prof. E. Niehaus, der es mir ermöglichte, während einer Assistentätigkeit bei ihm diese Arbeit zu schreiben.

§ 1

Das Verhalten des Randabstandes unter biholomorphen Abbildungen

Im folgenden Paragraphen werden wir zeigen, daß der Randabstand unter biholomorphen Abbildungen nicht zu stark schwankt, sondern daß der Randabstand des Bildpunktes durch den Randabstand des Urbildpunktes abgeschätzt werden kann.

Def. 1: Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Bereich und $z \in G$. Dann heißt
$$\rho_G(z) := \inf_{w \in \partial G} |z - w|$$
der Randabstand von z bezüglich G.

Um die Abschätzungen zu erreichen, führen wir eine Hilfsfunktion ein, die invariant unter bestimmten biholomorphen Abbildungen ist.

Def. 2: Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet mit $0 \in G$, sei F_G die Menge der auf G holomorphen Funktionen, die dem Betrage nach kleiner als 1 sind und im Nullpunkt den Wert 0 annehmen; für jedes $z \in G$ definieren wir
$$h_G(z) := \sup_{f \in F_G} |f(z)| .$$

Falls aus dem Zusammenhang klar ist, um welches Gebiet es sich handelt, werden wir bei ρ_G und h_G den Index G fortlassen.

Die Invarianzeigenschaft von h liefert uns der folgende

Satz 1: Seien G und G' Gebiete im $\mathbb{C}^n$, die beide den Nullpunkt enthalten. Sei $\varphi : G \longrightarrow G'$ eine holomorphe Abbildung mit $\varphi(0)=0$. Dann gilt für alle $z \in G$: $h_G(z) \geq h_{G'}(\varphi(z))$.
Ist insbesondere φ biholomorph, so ist
$h_G(z) = h_{G'}(\varphi(z))$.

Beweis: Ist $f \in F_{G'}$, so ist $f \circ \varphi \in F_G$. Daraus folgt:
$$h_G(z) = \sup_{f \in F_G} |f(z)| \geq \sup_{f \in F_{G'}} |f \circ \varphi(z)| = h_{G'}(\varphi(z))$$

Ist φ biholomorph, so gilt außerdem

$$h_G(z) = h_G(\varphi^{-1}(\varphi(z))) \leq h_G(\varphi(z)) . \qquad \text{q.e.d.}$$

Wir schätzen jetzt ρ_G durch h_G nach unten ab.

Satz 2: Sei $G \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein streng-pseudokonvexes Gebiet mit $0 \in G$ und C^∞-Rand. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ und ein $K > 0$, so daß für alle $z \in G$ mit $\rho_G(z) < \varepsilon$ gilt:
$1 - h(z) \leq K \rho_G(z)$

Beweis: Der Beweis stützt sich im wesentlichen auf Ergebnisse der Dissertation von Ramiréz (8).
1.) Nach (8) §4 Satz 1 existieren nämlich Umgebungen $U = U(\partial G)$, $V = V(\overline{G})$ und eine Funktion $g = g(x,y): U \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:
i) g ist in (x,y) beliebig oft differenzierbar und in y holomorph,
ii) Re $g(x,y) > 0$ für $(x,y) \in \partial G \times \overline{G} - \{(x,x)\}$
iii) $g(x,x) = 0$ für alle $(x,x) \in \partial G \times \overline{G}$.
Nach (8) § 4 Lemma 1 existieren Funktionen $g_j = g_j(x,y)$ auf $U \times V$, in (x,y) beliebig oft differenzierbar und in y holomorph, so daß mit $x = (x_1,\ldots,x_n)$ und $y = (y_1,\ldots,y_n)$ gilt:

$$g(x,y) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)\, g_j(x,y)$$

2.) Sei $H := \{ z \in \mathbb{C}: \text{Re } z > 0 \}$ und $a = a(x_0) := g(x_0,0)$, $x_0 \in \partial G$.
Wir konstruieren nunmehr eine lineare Transformation, die H in den Kreis $K = \{z \in \mathbb{C}: |z-1| < 1\}$ so abbildet, daß 0 auf 0 und $a(x_0)$ auf 1 geht.
Nach (1) Kap. IV § 3 Satz 17 existiert jedenfalls eine (gebrochen) lineare Transformation φ, die 0 auf 0 und a auf 1 abbildet. Sei φ etwa gegeben durch

$$\varphi(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \qquad , \alpha\delta - \gamma\beta \neq 0$$

Da $\varphi(0) = 0$, folgt $\beta = 0$. Es ist $\varphi(a) = 1$, also

$$1 = \frac{\alpha a}{\gamma a + \delta}$$

Weil nach Eigenschaft ii) von g $a \neq 0$ gilt, erhalten wir

$$(\alpha - \gamma) = \frac{\delta}{a}$$

Aus der geforderten Bedingung $\varphi(H) \subset K$ leitet sich ab

$$|(\alpha - \gamma)z - \delta| < |\gamma z + \delta| \text{ für alle } z \in H ,$$

(*) aequivalent dazu $\left|\frac{\delta}{a} z - \delta\right| < |\gamma z + \delta|$.

Da g stetig und $g(x_0,0) \neq 0$, existiert ein $M' > 0$, so daß

$$0 < M' \leq |a(x_0)| \quad \text{für alle } x_0 \in \partial G.$$

Wählen wir $\delta = 1$ und $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma > \frac{1}{M'}$, so ist, da δ reell,

$$\operatorname{Im}\left(\frac{\delta}{a} z - \delta\right)^2 = \operatorname{Im}\left(\frac{\delta}{a} z\right)^2 \leq \operatorname{Im}(\gamma z)^2 = \operatorname{Im}(\gamma z + \delta)^2,$$

und, weil $\operatorname{Re} z > 0$ ist,

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\delta}{a} z - \delta\right)^2 < \operatorname{Re}(\gamma z + \delta)^2 ,$$

also erhalten wir (*) und damit $\varphi(H) \subset K$.

3.) Zur Abkürzung setzen wir $g_1(x,y) := 1 - \varphi \circ g(x,y)$, also

$$g_1(x,y) = 1 - \frac{\alpha\, g(x,y)}{\gamma\, g(x,y) + \delta}$$

Wegen $g(x,x) = 0$, $x \in \partial G$, und $\delta = 1$, existiert ein $U_1 = U_1(\partial G)$, $V_1 = V_1(\partial G)$, $U_1 \subset\subset U$, $V_1 \subset\subset V$, und ein $M'' > 0$, so daß

$$0 < M'' \leq \inf_{\substack{x \in U_1 \\ y \in V_1}} |\gamma g(x,y) + \delta| \quad ;$$

sei jetzt $\varepsilon_1 > 0$ so gewählt, daß stets $z \in U_1 \cap V_1$, falls $z \in G$ und $\rho_G(z) < \varepsilon_1$.

4.) Wir betrachten die Funktion $l(s) := |1-s|$, $s \in \mathbb{C}$;
l ist um den 0-Punkt beliebig oft differenzierbar und dort in eine Taylorreihe entwickelbar. Hieraus ergibt sich, daß in der Nähe des 0-Punktes folgende Abschätzung richtig ist:

(**) $1 - |1 - s| \leq K_1 |s|$, K_1 geeignet.

5.) Sei jetzt $\varepsilon > 0$ so klein gewählt, daß $\varepsilon < \varepsilon_1$ und für $1 - |1 - \varphi \circ g|$ die Abschätzung (**) gilt. Sei weiterhin $z \in G$ mit $\rho(z) < \varepsilon$ beliebig, aber fest gewählt und sei $x \in \partial G$ so, daß $|x-z| = \rho_G(z)$. Dann gilt, da $f(z) := g_1(x,z)$ aus F_G:
$h(z) \geq |g_1(x,z)|$, also

$$1 - h(z) \leq 1 - |g_1(x,z)| = 1 - |1 - \varphi \circ g(x,z)| \leq K_1 |\varphi \circ g(x,z)| \leq$$
$$\leq K_1 M''^{-1} |\alpha| \sum_{j=1}^{n} |x_j - z_j|\, |g_j(x,z)| .$$

Es ist $\alpha = \alpha(a(x_0))$ beschränkt, denn es ist $\alpha = \gamma + \frac{\delta}{a(x_0)}$ und $a(x_0) = g(x_0,0)$ ist stetig auf U. Also existiert ein $M > 0$ und ein $K > 0$, so daß

$$1 - h(z) \leq M \sum_j |x_j - z_j| \leq K |x - z| = K\, \rho_G(z) .$$

q.e.d.

Um den Randabstand nach oben hin abzuschätzen, zeigen wir zuerst:
Bei einem streng-pseudokonvexen Gebiet können wir im Innern des Gebietes eine Kreisfläche stets so an den Rand legen, daß die Kreisfläche den Rand nur in einem Punkte berührt.

Satz 3: Sei G ein streng-pseudokonvexes Gebiet mit C^2-Rand, $G \subset\subset \mathbb{C}^n$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß für alle $z \in G$ mit $\delta_G(z) < \varepsilon$ gilt: Ist $P \in \partial G$ so gewählt, daß $|P-z| = \delta_G(z)$, dann existiert eine 1-dimensionale Kreisfläche K_P, die in G liegt, ∂G in P berührt und z enthält sowie den Radius ε besitzt (der Radius ist also unabhängig von z und P).

Beweis: 1. Sei φ die Randfunktion von G; nach (6) Chap.IV Sec. A 4 können wir φ so wählen, daß $d\varphi \neq 0$ in einer geeigneten Umgebung $U(\partial G)$.
2. Sei jetzt $P \in \partial G$ beliebig, aber fest gewählt. Dann ist $(d\varphi)_P \neq 0$, also ist $\{\varphi = 0\}$ eine in der Umgebung von P glatte Hyperfläche. Mit Hilfe einer Translation können wir immer erreichen, daß P der Nullpunkt ist. Weiterhin können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\varphi = i\, a_P\, (z_j - \bar{z}_j) +$ höhere Glieder, $a_P = 0$, j geeignet, da φ durch eine analytische Drehung immer in die obige Form gebracht werden kann(vgl. (4), Anfang von Beweis zu Satz 8). O.B.d.A. sei j=1.
3. Nach (4) §2 Satz 1 existiert ein $b_P > 0$, so daß das Gebiet $G_P := \{ z \in \mathbb{C}^n : |z_1 - ib_P| < b_P ,\ |z_j| < |z_1| \}$ auf der Seite $\varphi < 0$ liegt; speziell liegt also die Kreisfläche $K'_P := \{ z \in \mathbb{C}^n : |z_1 - ib_P| < b_P,\ z_2 = \ldots = z_n = 0 \}$ in G.

4. Nach dem Beweis von (4) muß $b_P < \dfrac{a_P}{2gn^2}$ sein mit

$g := \operatorname{Max}\left(\dfrac{\partial^2 \varphi / U'}{\partial z_j\, \partial z_k} , \dfrac{\partial^2 \varphi / U'}{\partial z_j\, \partial \bar{z}_k} \right)$, wobei $U' = U'(\partial G)$ so gewählt, daß $U' \subset\subset U$. Da $d\varphi \neq 0$ auf ∂G, $d\varphi$ auf G stetig und ∂G kompakt, existiert jedenfalls ein $\varepsilon^* > 0$, so daß $a_P > \varepsilon^*$ für alle $P \in \partial G$. Da $g < \infty$, folgt: es existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß wir $b_P = \varepsilon$ wählen können; ε ist unabhängig von P.

5. Sei jetzt $z \in G$ mit $\rho_G(z) < \varepsilon$ und $P \in \partial G$ so gewählt, daß $|z-P| = \rho_G(z)$. Dann liegt z auf der 1-dimensionalen Normalen von $\{ \varphi = 0 \}$, die durch P geht. Da bei Drehung und Translation Normale in Normale übergehen, liegt z nach den in 2. durchgeführten Prozessen auf der Normalen zu $\{ 0 = \varphi = ia_P(z_1 - \bar{z}_1) + \text{höhere Glieder} \}$ durch den Nullpunkt. Daraus folgt: Das Bild von z liegt in K'_P. Durch Umkehrung der in 2. ausgeführten Drehung und Translation erhalten wir aus K'_P das gesuchte K_P.

q.e.d.

Dieses Ergebnis wollen wir jetzt benutzen, um den Randabstand nach oben hin abzuschätzen.

Satz 4: Sei $G \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein streng-pseudokonvexes Gebiet mit C^2-Rand, $0 \in G$. Dann existiert ein $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$, so daß für alle $z \in G$ mit $\rho_G(z) < \delta$ gilt:

$$\varepsilon \, \rho_G(z) \leq 1 - h_G(z)$$

Beweis: 1. Sei $\frac{1}{2} < q < 1$ und $G_q := \{ z \in G: \sup_{f \in F_G} |f(z)| < q \}$.

Wir behaupten, daß $G_q \subset\subset G$ liegt. Angenommen, dies ist nicht der Fall. Dann existiert eine Folge (z_n) aus G_q mit $(z_n) \longrightarrow z_o$, $z_o \in \partial G$ und für alle $f \in F_G$ gilt: $|f(z_n)| \leq q < 1$. Im Beweis von Satz 2 haben wir jedoch eine Funktion g_1 konstruiert, $g_1(z_o, z_o) = 1$, also $g_1(z_o, z_n) \longrightarrow 1$ und weiterhin gilt $g_1(z_o, z) \in F_G$.

2. Nach Satz 3 können wir ein $\delta' > 0$, $\delta' < 1$ so wählen, daß zu jedem $z \in G$ mit $\rho_G(z) < \delta'$ eine Kreisfläche K_P existiert, die z enthält, ∂G in einem Punkt P berührt und deren Radius δ' ist; z und P liegen dabei auf der gleichen Normalen zu ∂G. Liegt z' auf der gleichen Normalen zu ∂G wie z und $\rho_G(z') \leq \rho_G(z)$, so folgt aus dem Beweis zu Satz 3 sofort, daß $z' \in K_P$; mithin hängt K_P also im wesentlichen von P ab. Sei M_P der Mittelpunkt des Kreises K_P und sei $E_P := \{ z \in K_P: |z - M_P| < \frac{\delta'}{2} \}$.

3. O.B.d.A. sei δ' so klein, daß $0 \notin K_P$ für alle $P \in \partial G$. Sei q so groß, daß $\overline{E}_P \subset \overline{G}_q$; daß dies möglich ist, folgt wieder mit Hilfe der im Beweis von Satz 2 konstruierten Funktion

$g_1(x,y)$. Wir definieren $F_P := \{ f$: f holomorph auf K_P, $|f/\partial E_P| \leq q$, $|f| < 1 \}$. Ist $f \in F_G$, so ist f wegen $\overline{E}_P \subset \overline{G}_q$ auch Element von F_P.

4. Wir setzen $\delta := \frac{\delta'}{2}$; sei jetzt $z \in G$ mit $\rho_G(z) < \delta$, sei $P \in \partial G$ so gewählt, daß $|z-P| = \rho_G(z)$. Dann folgt $z \in H_P := K_P - \overline{E}_P$

5. Als nächstes definieren wir

$$F(z) := \frac{\log q}{\log \frac{1}{2}} \log r \quad , \quad r := |z-M_P| (\delta')^{-1} \; ;$$

F ist auf einer Umgebung von $\overline{H}$ definiert und harmonisch.
Es ist $F/\partial K_P = c \log 1 = 0$ und $F/\partial E_P = \log q$.
Ist $g \in F_P$, so ist $|g| \leq q$ auf ∂E_P, also dort $\log q \geq \log|g|$; da $q < 1$, $|g| < 1$, folgt $|\log q| \leq |\log |g||$, also $|F/\partial E_P| \leq |\log |g||$.
Es ist weiterhin $|F/\partial K_P| = 0 \leq |\log |g||$.
F und $\log |g|$ sind harmonisch, also gilt nach dem Maximumprinzip in H : $|\log |g|| \geq |F|$. Da $\log |g|$ und F auf H negativ sind, erhalten wir dort $\log |g| \leq F$, also

$$\log |g| \leq \frac{\log q}{\log \frac{1}{2}} \log r = K(q) \log r$$

also $|g| \leq \varepsilon(q)\, r$ mit $\varepsilon(q) > 0$ und $g \in F_P$.
Für $q \longrightarrow 1$ folgt $\varepsilon(q) \longrightarrow 1$. Da $\delta' < 1$, können wir O.B.d.A. q so wählen, daß $\varepsilon(q)(\delta')^{-1} \leq 1$. Weil jedes $f \in F_G$, beschränkt auf H, in F_P liegt, folgt nunmehr , wobei $\varepsilon := \varepsilon(q)(\delta')^{-1}$

$$1-h(z) \geq 1 - \sup_{f \in F_G} |f(z)| \geq 1 - \varepsilon\, r\, \delta' \geq \varepsilon(\delta - |z-M_P|) = \varepsilon\, \rho_G(z) \quad .$$

Es ist klar, daß wir ε unabhängig von z wählen können, da dies für δ' möglich ist. q.e.d.

Damit haben wir unsere Abschätzungen über den Randabstand bewiesen.

§ 2

Verhalten der Caratheodory-Metrik am Rande

In dem folgenden Paragraphen soll untersucht werden, wie sich die Caratheodory-Metrik bei Annäherung an den Rand eines streng-pseudokonvexen Gebietes verhält. Wir werden dabei zeigen, daß die Caratheodory-Metrik verschieden stark gegen unendlich strebt, jenachdem, ob wir zwei Folgen betrachten, die gegen den gleichen oder gegen verschiedene Randpunkte konvergieren.

Zuerst betrachten wir den Fall, daß zwei Folgen gegen verschiedene Randpunkte konvergieren. Um die Caratheodory-Metrik in den Griff zu bekommen, konstruieren wir uns eine Funktion, die unser Gebiet so auf den Einheitskreis abbildet, daß zwei festgewählte Randpunkte des Gebietes, die verschieden sind, in zwei verschiedene Randpunkte des Einheitskreises übergehen.

Satz 5: Sei $G \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein streng-pseudokonvexes Gebiet mit C^{k+2}-Rand ($k \geq 0$). Dann existieren Umgebungen $U = U(\partial G)$ und $V = V(\overline{G})$ und eine Funktion $g: (U \times U \times V) - \{(x,x,y)\} \to \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

a) $g(x_1,x_2,y)$ ist eine meromorphe Funktion in y, holomorph in y, falls $(x_1,x_2,y) \neq (x_1,x_2,x_2)$ und k-mal differenzierbar nach x_1 und x_2;

b) $\operatorname{Re} g(x_1,x_2,y) > 0$ und $\operatorname{Re}(g(x_1,x_2,y))^{-1} > 0$ falls $(x_1,x_2,y) \neq (x_1,x_2,x_1)$ und $(x_1,x_2,y) \neq (x_1,x_2,x_2)$;

c) $g(x_1,x_2,x_1) = 0$ und $g(x_1,x_2,x_2) = \infty$ für alle (x_1,x_2,x_1) und $(x_1,x_2,x_2) \in \partial G \times \partial G \times \overline{G} - \{(x,x,y)\}$.

Beweis: Der Beweis verläuft ähnlich wie der Beweis von Satz 1 in § 4 der Dissertation von Ramiréz (8).

1. Da G ein streng-pseudokonvexes Gebiet ist, existiert eine Umgebung $U^* = U^*(\partial G)$, eine streng-plurisubharmonische Funktion φ auf U^* mit $\varphi \in C^{k+2}(U^*)$, $d\varphi \neq 0$ und $G \cap U^* = \{x \in U^* : \varphi(x) < 0\}$. Wir definieren jetzt:

$$P_x(y) := 2 \sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} - \sum_{i,j=1}^{n} (x_i - y_i)(x_j - y_j) \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_j \partial x_i}$$

Ramiréz zeigt dann: Zu jedem $P \in \partial G$ existiert eine Kugelumge-

bung $K = K_r(P)$, so daß $\mathrm{Re}\, P_p(y) > 0$ für alle $y \in (\overline{G} - \{P\}) \cap K_r(P)$. Ist D die Diagonale in $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$, so existiert also eine Umgebung $W = W(D)$, so daß $\mathrm{Re}\, P_x(y) > 0$ für $(x,y) \in ((\partial G \times \overline{G}) - D) \cap W$.

2. Sei jetzt $p \in \partial G$ fest gewählt. Sei $A(p) := \{ y \in U^* : P_p(y) = 0 \}$. Nach (8) existieren dann Umgebungen $U_1 = U_1(p)$, $V_1 = V_1(p)$ mit $U_1 \times V_1 \subset W$ und $V_2 = V_2(p)$ mit $V_2 \subset\subset V_1$, eine Umgebung S von $A(p) \cap V_1$ in V_1, so daß $S \cap \overline{G} \subset\subset V_2$. Weiterhin existiert, da $P_x(y)$ stetig, eine Umgebung $U_2 = U_2(p)$, so daß $A(x) \cap V_2 \subset S$ für alle $x \in U_2$ (vgl. Abb. 1). Außerdem existiert nach (8), § 4 Beweis von Satz 1 eine Steinsche Umgebung G_p von $\overline{G}$, so daß $\{G_p - \overline{S}\} \cup \{V_2 \cap G_p\}$ eine offene Überdeckung von G_p ist.

3. Sei $F := C^k(U_2)$ = Raum der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf U_2, versehen mit der üblichen Topologie der kompakten Konvergenz. Sei O^F die Garbe der holomorphen Funktionskeime über G_p mit Werten in F und M^F die Garbe der meromorphen Funktionskeime über G_p mit Werten in F. Dann definiert $\{G_p - \overline{S};\ 0\}$, $\{G_p \cap V_2;\ 1/P_x(y)\}$ eine Cousin-I-Verteilung von meromorphen Funktionen mit Werten in F. Nach (8), § 4 Beweis von Satz 1 existiert dann ein $m_x(y) \in H^0(G_p, M^F)$, so daß

$$h_x^1(y) := (m_x(y) - 0)/\, G_p - \overline{S} \in H^0(G_p - \overline{S}, O^F)$$
$$h_x^2(y) := (m_x(y) - 1/P_x(y))/\, G_p \cap V_2 \in H^0(G_p \cap V_2,\ O^F).$$

4. Seien jetzt x_1^0, $x_2^0 \in \partial G$ fest gewählt, $x_1^0 \neq x_2^0$. Für jeden dieser beiden Punkte führen wir die oben gemachte Konstruktion durch. Dann existieren G_i = Steinsche Umgebungen von $\overline{G}$, S_i = Umgebungen von $A(x_i^0)$, $V_2^i = V_2(x_i^0)$ und meromorphe Funktionen $m_x^i(y)$ mit ~~Werten~~ Werten in $F^i := C^k(U_2^i)$ (wobei U_2^i bezüglich x_i^0 so gewählt, wie U_2 bezüglich p in Abschnitt 2 dieses Beweises), so daß

$${}_i h_x^1(y) := (m_x^i(y) - 0)/\, G_i - \overline{S}_i \in H^0(G_i - \overline{S}_i,\ O^{F^i})$$
$${}_i h_x^2(y) := (m_x^i(y) - 1/P_x(y))/\, G_i \cap V_2^i \in H^0(G_i \cap V_2^i,\ O^{F^i})$$

für $i = 1,2$. O.B.d.A. gelte $V_2^1 \cap V_2^2 = \emptyset$.

5. Seien jetzt U', V' offene Mengen im $\mathbb{C}^n$. Nach (8), § 1 folgt dann , daß jedes Element $h \in H^0(V', C^k(U'))$ als Element aus $C_y^k(U' \times V')$ aufgefaßt werden kann, wobei $C_y^k(U' \times V')$ den Raum der nach der ersten Komponente k-mal differenzierbaren und nach der letzten Komponente holomorphen Funktionen bezeichnet.

Angewandt auf unser Problem ergibt sich:

$$ {}_i h^1_x(y) \in C^k_y(U^i_2 \times (G_i - \overline{S}_i)) $$
$$ {}_i h^2_x(y) \in C^k_y(U^i_2 \times (G_i \cap V^i_2)) \quad , \qquad i = 1,2 $$

6. Wir betrachten jetzt

$$ g(x_1,x_2,y) := \frac{m^2_{x_2}(y) - C_2}{m^1_{x_1}(y) - C_1} \qquad , \; C_1, C_2 \in \mathbb{R} $$

und behaupten, daß g nach geeigneter Wahl der C_1, C_2 unsere Bedingungen a),b) und c) des Satzes lokal erfüllt.

α) Seien jetzt $V^i_3 \subset\subset V^i_2 \cap G_1 \cap G_2$, i= 1,2 und $V^*_3 \subset\subset (G_1 - \overline{S}_1) \cap (G_2 - \overline{S}_2)$ so gewählt, daß $V^1_3 \cup V^2_3 \cup V^*_3$ eine offene Überdeckung von $\overline{G}$ bildet. Dabei dürfen wir o.B.d.A. voraussetzen, daß $V^1_3 \cap V^2_3 = \emptyset$. Weiterhin wählen wir Umgebungen U^i_3 von x^o_i, die relativ kompakt in U^i_2 liegen (i= 1,2).

β) Setzen wir der Abkürzung halber $a := a(x,y,C_1) := |m^1_x(y) - C_1|^2$ so gilt in $U^1_3 \times U^2_3 \times V^*_3$:

$$ \operatorname{Re} g(x_1,x_2,y) = \frac{1}{a}\left[\operatorname{Re}(m^1_{x_1}(y) - C_1)\,\operatorname{Re}(m^2_{x_2}(y) - C_2) + \right. $$
$$ \left. + \operatorname{Im}(m^1_{x_1}(y) - C_1)\,\operatorname{Im}(m^2_{x_2}(y) - C_2)\right] = $$
$$ = \frac{1}{a}\left[\operatorname{Re}({}_1h^1_{x_1}(y) - C_1)\,\operatorname{Re}({}_2h^1_{x_2}(y) - C_2) + \operatorname{Im}\,{}_1h^1_{x_1}(y)\,\operatorname{Im}\,{}_2h^2_{x_2}(y)\right]_y $$

da C_1, C_2 reell. Es ist ${}_1h^1_{x_1}$ und ${}_2h^1_{x_2}$ stetig, also können wir bei hinreichend kleinen C_1, C_2 immer erreichen, daß

$\operatorname{Re} g(x_1,x_2,y) > 0$ in $U^1_3 \times U^2_3 \times V^*_3$ (also ist dort auch $a > 0$).

Da weiterhin auch $\operatorname{Re}\dfrac{1}{g(x_1,x_2,y)} = \operatorname{Re}\dfrac{\overline{g(x_1,x_2,y)}}{|g(x_1,x_2,y)|^2}$,

gilt dies auch für $\operatorname{Re}(g(x_1,x_2,y))^{-1}$.

γ) Wir betrachten jetzt $U^1_3 \times U^2_3 \times V^1_3 - \{(x_1,x_2,x_1)\}$. Dort gilt

$$ \operatorname{Re} g(x_1,x_2,y) = \frac{1}{a}\left[\operatorname{Re}(m^1_{x_1}(y) - C_1)\,\operatorname{Re}(m^2_{x_2}(y) - C_2) + \right. $$
$$ \left. + \operatorname{Im} m^1_{x_1}(y)\,\operatorname{Im} m^2_{x_2}(y)\right] = $$
$$ = \frac{1}{a}\left[(\operatorname{Re}({}_1h^2 - C_1) + \operatorname{Re} P_{x_1}(y)/|P_{x_1}(y)|^2)\,\operatorname{Re}({}_2h^1 - C_2) + \right. $$
$$ (*) \qquad \left. + (\operatorname{Im}\,{}_1h^2 - \operatorname{Im} P_{x_1}(y)/|P_{x_1}(y)|^2)\,\operatorname{Im}\,{}_2h^1\right] . $$

Es ist jedenfalls $\operatorname{Im}\,{}_1h^2$ und $\operatorname{Im}\,{}_2h^1$ auf dem betrachteten Bereich beschränkt. Ist dort auch der Ausdruck

Im $P_{x_1}(y)/|P_{x_1}(y)|^2$ beschränkt, so ist der Term (x) dort beschränkt, und wir können durch geeignete Wahl der Konstanten C_1, C_2 erreichen, daß dort Re $g(x_1,x_2,y) > 0$. Wie oben folgt das gleiche Resultat für $\mathrm{Re}(g(x_1,x_2,y))^{-1}$.

Ist $(\mathrm{Im}\ P_{x_1}(y))/|P_{x_1}(y)|^2$ dort nicht beschränkt, so modifizieren wir $P_{x_1}(y)$ auf folgende Weise: Jedenfalls existiert ein $R > 0$, so daß $P_{x_1}(G) \subset K_R(0)$ für alle $x_1 \in \overline{U}_3^1$, da P in in x_1 und y stetig und $\overline{G}$ kompakt. Wir können jetzt das Gebiet $K^* := \{x \in K_R(0): \mathrm{Re}\ x > 0\}$ biholomorph auf das Gebiet $H := \{z \in K_R(0): (\mathrm{Re}\ z)^2 > |\mathrm{Im}\ z|\}$ abbilden (vgl. Abb. 2) und zwar so, daß der Nullpunkt in den Nullpunkt übergeht, falls man diese Abbildung auf dem Rande topologisch fortsetzt. (vgl. (1) Kap. IV §). Die Abbildung sei etwa mit f bezeichnet. Dann ist $P^*_{x_1}(y) := f \circ P_{x_1}(y)$ für unsere Konstruktion genausogut, wie vorher $P_{x_1}(y)$, d.h. wir können alle vorher gemachten Konstruktionen, die wir mit $P_{x_1}(y)$ durchgeführt haben, jetzt mit $P^*_{x_1}(y)$ durchführen, insbesondere können wir wie oben eine Funktion $g(x_1,x_2,y)$ definieren. Für $P_{x_1}(y)$ gilt jedoch in $U_3^1 \times V_3^1$

$$|\mathrm{Im}\ P^*_{x_1}(y)|/|P^*_{x_1}(y)|^2 \leq \frac{|\mathrm{Im}\ P^*_{x_1}(y)|}{(\mathrm{Re}\ P^*_{x_1}(y))^2} \leq 1$$

und damit die obige Abschätzung von (x).

δ) Betrachten wir $(U_3^1 \times U_3^2 \times V_3^2) - \{(x_1,x_2,x_2)\}$, so können wir genauso wie in γ) zeigen, daß dort $\mathrm{Re}(g(x_1,x_2,y))^{-1} > 0$, also auch Re $g(x_1,x_2,y) > 0$. Damit ist also gezeigt, daß $g(x_1,x_2,y)$ in einer Umgebung $U^* \times U^{**} \times V$ von $\{x_1^0\} \times \{x_2^0\} \times \overline{G}$ der Bedingung b) des Satzes genügt. Dabei sei o.B.d.A. $U^* \cap U^{**} = \emptyset$

7. Es ist klar, daß $g(x_1, x_2, y)$ in $U^* \times U^{**} \times V_3^*$ holomorph in y ist. Ich untersuche jetzt g in $U^* \times U^{**} \times V_3^1$. Dort ist jedenfalls $m^1_{x_2} - C_2$ holomorph. Zu zeigen ist also, daß dort

$\dfrac{1}{m^1_{x_1}(y) - C_1}$ holomorph ist. Dies geht jedoch wie in (8) § 4

Beweis von Satz 1, p. 183. Die Konstruktion, die dort für $\frac{1}{m_x(y) - c}$ durchgeführt ist, läßt sich wortwörtlich übertragen. Dabei müssen wir gegebenenfalls U^* und V_3^1 etwas verkleinern und V_3^* entsprechend vergrößern (siehe (8)).

Ebenso ist $\frac{1}{g(x_1,x_2,y)}$ in y holomorph in $U^* \times U^{**} \times V_3^2$, wobei wieder V_3^2 und U^{**} gegebenenfalls verkleinert und V_3^* entsprechend vergrößert werden muß. Also ist $g(x_1,x_2,y)$ in y meromorph in einer geeigneten Umgebung $U^* \times U^{**} \times V^*$ von $\{x_1^0\} \times \{x_2^0\} \times \overline{G}$.

Unsere Funktion g ist sogar holomorph in $U^* \times U^{**} \times V^* - \{(x_1,x_2,x_2)\}$. Denn dort ist nach Abschnitt 6. dieses Beweises Re $1/g > 0$, also $|1/g| \neq 0$, mithin also $1/g \neq 0$. Das bedeutet, daß g in $U^* \times U^{**} \times V^* - \{(x_1,x_2,x_2)\}$ keine Polstelle besitzt, also dort holomorph ist.

Daß $g(x_1,x_2,y)$ in den Komponenten x_1 und x_2 k-mal differenzierbar ist, folgt aus Abschnitt 5 des Beweises.

8. Ist $x_1 \in U^*$ und $x_2 \in U^{**}$, so gilt nach nach Konstruktion von $m_{x_1}^1(y)$ und da $x_1 \neq x_2$

$$g(x_1,x_2,x_1) = \frac{m_{x_2}^2(x_1) - c_2}{m_{x_1}^1(x_1) - c_1} = \frac{b_1}{\infty} = 0$$

und nach Konstruktion von $m_{x_2}^2(y)$ $\quad g(x_1,x_2,x_2) = \frac{\infty}{b_2} = \infty$.

Damit erfüllt g also lokal die Bedingungen a), b) und c) unseres Satzes.

9. Die globale Konstruktion von g erfolgt durch eine C^∞-Teilung der Eins, indem $\partial G \times \partial G - \{(x,x)\}$ durch die oben konstruierten $(U^* \times U^{**})_j$, $j \in I$ überdeckt wird. Ich kann dabei erreichen, daß jedes $(x_1,x_2) \in (\partial G \times \partial G) - \{(x,x)\}$ nur in endlich vielen $(U^* \times U^{**})_j$ liegt. Sei $\{\varphi_j(x_1,x_2)\}$ die zugehörige C^∞-Teilung der Eins, $g^j(x_1,x_2,y)$ die zu $(U^* \times U^{**})_j$ zugehörigen Funktionen mit den Eigenschaften a),b) und c) und V^j die zugehörigen Umgebungen von $\overline{G}$. Ist $(x_1,x_2) \in (\partial G \times \partial G) - \{(x,x)\}$ so sei $V_{x_1,x_2} := \bigcap_{(x_1,x_2) \in (U^* \times U^{**})_j} V^j$; V_{x_1,x_2} ist eine Umgebung von $\overline{G}$, da (x_1,x_2) nur in endlich vielen $(U^* \times U^{**})_j$ liegt.

Damit ist aber auch $V := \bigcup_{\substack{(x_1,x_2) \in \partial G \times \partial G \\ x_1 \neq x_2}} V_{x_1,x_2}$ eine Umgebung von G. Setzen wir

$$U := \bigcup_{j \in I} (U^{\ast} \times U^{\ast\ast})_j$$

und $g(x_1,x_2,y) := \sum_{j \in I} \varphi_j(x_1,x_2)\, g^j(x_1,x_2,y)$, so erfüllt g a), b) und c) unseres Satzes.

q.e.d.

Um unsere angestrebte Abbildung von G in den Einheitskreis konstruieren zu können, beweisen wir noch

Satz 6: Sei H der Kreisring $\{ z \in \mathbb{C} : 0 < r_1 < |z| < r_2 \}$, seien z_1, z_2 zwei fest gewählte Punkte auf ∂H mit $|z_1| = r_1$, $|z_2| = r_2$. Dann existiert eine holomorphe Funktion der Form

$$f(z) = \frac{c_1}{\varepsilon z - a} + \frac{c_2}{z - b}$$

so daß $|f| / H < 1$, $f(z_1) = i$, $f(z_2) = 1$, $\varepsilon, c_1, c_2, a, b \in \mathbb{C}$ und $|\varepsilon| = 1$.

Beweis: 1. Seien z_1 und z_2 wie oben angegeben gewählt. Wir betrachten dann das Gleichungssystem

$$(\ast) \qquad \begin{aligned} \frac{c_1}{\varepsilon z_2 - a} + \frac{c_2}{z_2 - b} &= 1 \\ \frac{c_1}{\varepsilon z_1 - a} + \frac{c_2}{z_1 - b} &= i \end{aligned}$$

Wir wollen untersuchen, wann (∗) lösbar ist. Dazu setzen wir $\varepsilon z_2 - a = s_2$, $\varepsilon z_1 - a = s_1$, $z_2 - b = t_2$, $z_1 - b = t_1$, so geht (∗) über in

$$(\ast\ast) \qquad \begin{aligned} c_1 t_2 + c_2 s_2 &= s_2 t_2 \\ c_1 t_1 + c_2 s_1 &= i\, s_1 t_1 \end{aligned}$$

und wir erhalten die Bedingungen

$$c_2 = \frac{t_2 t_1 (s_1 i - s_2)}{s_1 t_2 - t_1 s_2}$$

$$c_1 = \frac{s_1 s_2 (t_1 i - t_2)}{t_1 s_2 - t_2 s_1}$$

Wählen wir a hinreichend nahe an εz_1 und außerhalb von H und b hinreichend nahe an z_2 und auch außerhalb von H, so ist wegen $|t_1 s_2| \geq (r_2 - r_1)^2 > 0$ jedenfalls $s_1 t_2 - t_1 s_2 \neq 0$., damit ist aber daß Gleichungssystem (××) lösbar und damit auch (×).

2. Sei N_1 die Normale von ∂H durch z_1 und N_2 die Normale von ∂H durch z_2. Wir untersuchen zuerst den Fall, daß $N_1 = N_2$, also z_1 und z_2 auf dem gleichen Radius liegen; wir wählen $\varepsilon = e^{i\delta} = 1$ und a, b so, daß

i) a und b auf $N_1 (= N_2)$ liegen, ii) $a \notin H$, $b \notin H$

iii) $|a - \varepsilon z_1| << (r_2 - r_1)$, $|a - \varepsilon z_1| << r_1$, $|b - z_2| << (r_2 - r_1)$.

Betrachten wir jetzt

$$f(z) = \frac{c_1}{\varepsilon z - a} + \frac{c_2}{z - b} \quad ,$$

wobei c_1, c_2 nach (×) bestimmt worden sind. Sei $z'' \in \partial H$, $|z''| = r_2$. Da b auf der Normalen zu ∂H durch z_2 liegt, folgt, falls $z'' \neq z_2$

$$\left| \frac{c_2}{z_2 - b} \right| > \left| \frac{c_2}{z'' - b} \right|$$

und da a auf der Normalen zu ∂H durch z_2 liegt, $|a - \varepsilon z_1| << r_1$, folgt

$$\left| \frac{c_1}{\varepsilon z_2 - a} \right| > \left| \frac{c_1}{\varepsilon z'' - a} \right| \qquad \text{(vgl. Abb. 3)} .$$

Also folgt für alle $z'' \in \partial H$ mit $|z''| = r_2$, $z'' \neq z_2$

$$|f(z'')| < |f(z_2)| = 1 \quad ;$$

ebenso folgt für alle $z' \in \partial H$ mit $|z'| = r_1$, $z' \neq z_1$

$$|f(z')| < |f(z_1)| = |i| = 1;$$

aus dem Maximumprinzip folgt daraus sofort, daß $|f(H)| < 1$.

3. Sei nun $z_1 = r_1 e^{i\vartheta}$, $z_2 = r_2 e^{i\delta}$. Wir definieren $\varepsilon := e^{i(\delta - \vartheta)}$. Dann liegen εz_1 und z_2 auf der gleichen Normalen N zu ∂H und wir können unsere obige Konstruktion wieder durchführen.

q.e.d.

Nach diesen Vorbereitungen können wir endlich die Carathéodory-Metrik auf zwei Folgen studieren, die gegen zwei verschiedene Randpunkte konvergieren. Wir werden sehen, daß sie auf diesen bei Annäherung an den Rand logarithmisch gegen unendlich strebt.

Satz 7: Sei $G \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein streng-pseudokonvexes Gebiet mit C^∞-Rand. Dann existiert zu allen x_1^0 und x_2^0 aus ∂G mit $x_1^0 \neq x_2^0$ ein $K > 0$ und ein $\varepsilon > 0$, so daß gilt:

Sind (z_n^ν) Folgen aus G mit $(z_n^\nu) \longrightarrow x_\nu^0$, $\nu = 1,2$, so ist für alle z_n^ν mit $\varrho_G(z_n^\nu) < \varepsilon$:

$$D_G(z_n^1, z_n^2) \geq -\frac{1}{2}\log \varrho_G(z_n^1) - \frac{1}{2}\log \varrho_G(z_n^2) - K \ .$$

Beweis: 1. Sei x_n^ν aus ∂G so gewählt, daß $\varrho_G(z_n^\nu) = |x_n^\nu - z_n^\nu|$, $\nu = 1,2$. Nach Satz 2 existieren meromorphe Funktionen $f^n = f^n(y) = g(x_n^1, x_n^2, y)$ auf einer Umgebung $V = V(\overline{G})$ mit $f^n(x_n^1) = 0$, $f^n(x_n^2) = \infty$ und $\operatorname{Re} f^n(y) > 0$ auf G. Nach § 4 Lemma 1 von (8), angewandt auf $g(x_1, x_n^2, y)$ bzw. $g(x_n^1, x_2, y)$, gilt: es existieren $K_n > 0$, so daß

$$|f^n(x_n^1) - f^n(z_n^1)| \leq K_n \, |x_n^1 - z_n^1| = \varrho_G(z_n^1) \, K_n$$

$$|(f^n(x_n^2))^{-1} - (f^n(z_n^2))^{-1}| \leq K_n \, |x_n^2 - z_n^2| = \varrho_G(z_n^2) \, K_n \ .$$

Der Beweis geht analog wie in Abschnitt 1 und Abschnitt 5 des Beweises von Satz 2. Da die dort verwendeten $g_j(x,y)$ stetig in x sind, sind die K_n beschränkt durch ein $K_1 > 0$. Aus dem gleichen Grunde kann man K_1 unabhängig von den Folgen (z_n^ν), $\nu = 1,2$ wählen. Dann gilt also

$$|f^n(x_n^1) - f^n(z_n^1)| \leq K_1 \ \varrho_G(z_n^1)$$

$$|(f^n(x_n^2))^{-1} - (f^n(z_n^2))^{-1}| \leq K_1 \ \varrho_G(z_n^2).$$

2. Da $\operatorname{Re} f^n(y) > 0$ für $y \in G$ und $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Re}(f^n(y))^{-1} > 0$ für $y \in G$ und $n \in \mathbb{N}$, existieren Kreise K^* und K^{**}, die außerhalb von $f^n(G)$ liegen und $f^n(\overline{G})$ in 0 bzw. ∞ berühren. $H := S^2 - (\overline{K}^* \cup \overline{K}^{**})$. H ist zweifach zusammenhängend ohne isolierte Randpunkte, also existiert ein Kreisring $K_R = \{ z \in \mathbb{C} : 0 < r_1 < |z| < r_2 \}$ und eine biholomorphe Abbildung $f_{II}: H \longrightarrow K_R$ (siehe (10), p. 236). Nach (1), Kap. IV § 9 Satz 49a kann f_{II} über $\overline{H}$ hinaus analytisch fortgesetzt werden. Also existiert ein $K_2 > 0$, so daß in der Nähe von 0 bzw. ∞ gilt:

$$|f_{II}(0) - f_{II}(z)| \leq K_2 \, |0 - z|$$

$$|f_{II}(\infty) - f_{II}(z)| \leq K_2 \|\infty - z\| \, ,$$

wobei $\| \ \|$ den chordalen Abstand bezeichnet. Sei $z_1 := f_{II}(0)$, $z_2 := f_{II}(\infty)$. O.B.d.A. sei $|z_1| = r_1$, $|z_2| = r_2$.

3. Nach Satz 6 existiert ein $f_{III}: K_R \longrightarrow E = \{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \}$, so daß $f_{III}(z_1) = 1$, $f_{III}(z_2) = i$ und f_{III} ist von der Gestalt

$$f_{III}(z) = \frac{c_1}{\varepsilon z - a} + \frac{c_2}{z - b} \qquad a, b \notin \overline{K}_R, |\varepsilon| = 1$$

Da $a,b \notin \overline{K}_R$, existiert ein K_3, so daß

$$|1 - f_{III}(z)| \leq K_3 \, |z_1 - z| \quad , z \text{ nahe bei } z_1$$
$$|i - f_{III}(z)| \leq K_3 \, |z_2 - z| \quad , z \text{ nahe bei } z_2 .$$

4. Wir definieren jetzt $f_n(y) := (f_{III} \circ f_{II}^2 \circ f^n)(y)$.
Dann gilt: $|f_n(G)| < 1$, $f_n(x_n^1) = 1$, $f_n(x_n^2) = i$.
Aus den obigen Abschätzungen erhalten wir die Existenz eines $K_4 > 0$, so daß für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|1 - f_n(z_n^1)| \leq K_4 \, \rho_G(z_n^1)$$
$$|1 - f_n(z_n^2)| \leq K_4 \, \rho_G(z_n^2)$$

Hieraus gewinnen wir die Abschätzung

$$|1 - f_n(z_n^1)\,\overline{f_n(z_n^1)}| = |1 - |f_n(z_n^1)|^2| =$$
$$= |(1 + |f_n(z_n^1)|)(1 - |f_n(z_n^1)|)| \leq 2|1 - |f_n(z_n^1)|| \leq$$
$$\leq 2\,|1 - f_n(z_n^1)| \leq 2\,K_4\,\rho_G(z_n^1).$$

Analog folgt

$$|1 - f_n(z_n^2)\,\overline{f_n(z_n^2)}| \leq 2\,K_4\,\rho_G(z_n^2) .$$

5. Da f_n auf G holomorph und kleiner als 1, ist

$$d_G(z_n^1, z_n^2) \geq \log \frac{|f_n(z_n^1) - f_n(z_n^2)| + |1 - f_n(z_n^1)\,\overline{f_n(z_n^2)}|}{\sqrt{(1 - f_n(z_n^1)\,\overline{f_n(z_n^1)})(1 - f_n(z_n^2)\,\overline{f_n(z_n^2)})}}$$

Wegen $f_n(z_n^1) \to 1$ und $f_n(z_n^2) \to i$ folgt $|f_n(z_n^1) - f_n(z_n^2)| \geq k > 0$ für fast alle n. Hieraus und aus der Abschätzung in Abschnitt 4. erhalten wir für fast alle n

$$d_G(z_n^1, z_n^2) \geq \frac{1}{2} \log \frac{k^*}{4(K_4)^2 \rho_G(z_n^1)\,\rho_G(z_n^2)} \geq$$

$$\geq -\frac{1}{2} \log \rho_G(z_n^1) - \frac{1}{2} \log \rho_G(z_n^2) - K \text{ , mit } K > 0.$$

q.e.d.

Als nächstes studieren wir die Caratheodory-Metrik auf zwei Folgen, die gegen denselben Punkt $P \in \partial G$ konvergieren. Dazu müssen wir zwei Arten von Folgen unterscheiden, kegelartige und nicht kegelartige. Dabei heißt eine Folge, die gegen einen Punkt $P \in \partial G$ konvergiert, kegelartig, falls ein Kegel in G liegt, dessen Spitze mit P übereinstimmt, dessen

Achse mit der Normalen durch P zu ∂G zusammenfällt und der fast alle Glieder unserer Folge enthält. Zur Definition vergleiche auch (4), Def 2. Zwei Folgen, die in unserem Sinne kegelartig sind und gegen den gleichen Punkt $P \in \partial G$ konvergieren, sind auch im Sinne von (4) kegelartig.

Satz 8: Sei $G \subset\subset \mathbb{C}^n$ ein streng-pseudokonvexes Gebiet mit C^∞-Rand; sei $P \in \partial G$ und (z_n^1), (z_n^2) zwei Folgen aus G, die gegen P konvergieren und für die gilt: $|z_n^1 - P| = |z_n^2 - P|$. Dann existiert zu jedem $K > 0$ ein n_o , so daß für $n \geq n_o$ gilt

$$D_G(z_n^1, z_n^2) < -\frac{1}{2} \log \rho_G(z_n^1) - \frac{1}{2} \log \rho_G(z_n^2) - K$$

Beweis: 1. Durch Anwendung von Drehung und Translation können wir erreichen, daß P=0 und $\partial G \cap U(P) = \{F = 0\}$, wobei F die Form $F(z) = i\,a\,(z_j - \bar{z}_j)$ + höhere Glieder besitzt ($z=(z_1,\dots,z_n)$ O.B.d.A. sei $j=1$, $a>0$ und $U(P) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z - P| < 2\delta\}$, $\delta = 1$. Sei $S_1 := \{z=(z_1,\dots,z_n) \in U(P) : \operatorname{Im} z_1 = 0\}$. Wir zeigen zuerst:

(1) Ist $rG := \{z \in \mathbb{C}^n : \frac{1}{r} z \in G\}$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, und ist für Mengen $A, B \subset \mathbb{C}^n$ $\operatorname{DIST}(A,B)$ definiert als $\sup_{x \in A} \inf_{y \in B} |x-y|$, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $R_o > 0$, so daß für $r \geq R_o$ gilt:

$$\operatorname{DIST}(\partial(rG) \cap U(P),\ S_1) < \varepsilon \qquad \text{(vgl. Abb. 4)}$$

Dazu entwickeln wir F um P=0 in eine Taylorreihe:

$$F(z,\bar{z}) = i\,a(z_1 - \bar{z}_1) + \frac{1}{2!}\left[\sum_j z_j \frac{\partial}{\partial z_j} + \bar{z}_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\right]^2 F(z,\bar{z})\Big|_0 +$$

+ höhere Glieder. Für ∂G ergibt sich daraus die Gleichung:

$$-i\,a\,2 \operatorname{Im} z_1 = \frac{1}{2!}\left[\sum_j z_j \frac{\partial}{\partial z_j} + \bar{z}_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\right]^2 F(z,\bar{z})\Big|_0 +$$

+ höhere Glieder. Für $z \in \partial(rG)$ ergibt sich:

$$-ia\,\frac{\operatorname{Im} z_1}{r} = \frac{1}{r^2}\,\frac{1}{2!}\left[\sum_j z_j \frac{\partial}{\partial z_j} + \bar{z}_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\right]^2 F\Big|_0 +$$

+ $O(r)$. Da der letzte Therm in U(P) beschränkt bleibt, falls U hinreichend klein, folgt für $r \to \infty$: $\operatorname{Im} z_1 \longrightarrow 0$, was zu zeigen war.

2. Wie beim Beweis von Satz 3 zeigt man, daß ein $\varepsilon_o > 0$ existiert, so daß für alle $z_o \in \partial G \cap U(P)$ gilt: Ist $K^{\varepsilon_o} := \{z \in \mathbb{C}^n : |z_1 - i\varepsilon_o| < \varepsilon_o,\ |z_\nu| < |z_1|,\ \text{für } \nu \neq 1\}$, so existiert eine analytische Drehung φ_{1,z_o} und eine Translation φ_{2,z_o}, so daß $\varphi_{z_o} := (\varphi_{1;z_o} \circ \varphi_{2,z_o})^{-1}$ K^{ε_o} in $G \cap U(P)$ abbildet, $\varphi_{z_o}(0) = z_o$ und $k^{\varepsilon_o}_{z_o} := \varphi_{z_o}(i\varepsilon_o, 0, \ldots, 0)$ auf der Normalen zu G durch z_o liegt und von z_o den Abstand ε_o besitzt. Es ist klar, daß $k^{\varepsilon_o}_{z_o}$ in $G \cap U(P)$ liegt.

O.B.d.A. sei $\varepsilon_o < \frac{1}{6}\delta$ und sei $K_z := \varphi_z(K^{\varepsilon})$ mit $\varepsilon := \frac{|z|\varepsilon_o}{2}$, für $z \in \partial G \cap U(P)$. Dann definieren wir

$$H^* := (U(P) \cap G) - \bigcup_{z \in \partial G \cap U(P)} K_z \qquad \text{(vgl. Abb. 5)}$$

3. Weiterhin definieren wir jetzt $K_r = K_r(P) := \{z \in \mathbb{C}^n : |z - P| < r\}$. Sei Q eine reelle Zahl, die größer als 1 ist. Dann gilt $Q^n K_{\frac{\delta}{Q^n}} = K_\delta$ und also haben wir: $Q^n((H^* \cap K_{\frac{\delta}{Q^n}}) - \overline{K}_{\frac{\delta}{2Q^n}})$ ist enthalten in $K_\delta - \overline{K}_{\frac{\delta}{2}}$. Weiterhin ist

$$\operatorname{dist}(Q^n H^* \cap K_\delta - \overline{K}_{\frac{\delta}{2}},\ \partial(Q^n G)) = Q^n \operatorname{dist}((H^* \cap K_{\frac{\delta}{Q^n}}) - \overline{K}_{\frac{\delta}{2Q^n}},\ \partial G)$$

$$\geq Q^n \frac{\varepsilon_o}{2Q^n \cdot 2} = \frac{1}{4}\varepsilon_o$$

Daraus folgt

(2) $\operatorname{dist}(((Q^n H) \cap K_\delta) - \overline{K}_{\frac{\delta}{2}},\ S_1) \geq \operatorname{dist}(((Q^n H^*) \cap K_\delta) - \overline{K}_{\frac{\delta}{2}},\ \partial(Q^n G)) \geq$

$\geq \frac{1}{4}\varepsilon_o$.

4. Nach (1) existiert zu $\frac{1}{8}\varepsilon_o$ ein $R_o > 0$, so daß $\operatorname{DIST}(\partial(rG) \cap K_{2\delta},\ S_1) < \frac{1}{8}\varepsilon_o$ für $r \geq R_o$. Wir definieren jetzt

$$H := \bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ Q > 1 \\ Q^n \geq R_o}} Q^n((H^* \cap K_{\frac{\delta}{Q^n}}) - \overline{K}_{\frac{\delta}{2Q^n}})$$

Ich behaupte nun: Ist $Q^n \geq R_o$, so liegt H relativ kompakt in $Q^n G$. Dazu berechne ich:

(3) $\operatorname{dist}(H, \partial(Q^n G)) \geq \operatorname{dist}(H, S_1) - \operatorname{DIST}(\partial(Q^n G) \cap U(P), S_1) \geq \frac{1}{4}\varepsilon_0 - \frac{1}{8}\varepsilon_0 = \frac{1}{8}\varepsilon_0$. Daraus folgt jedoch: es existiert ein Gebiet H', so daß $H \subset\subset H'$ und $H' \subset Q^n G$ für $Q^n \geq R_0$.
Somit ergibt sich für $z_1, z_2 \in H$, $Q^n \geq R_0$,
$D_{Q^n G}(z_1, z_2) \leq D_{H'}(z_1, z_2) \leq C < \infty$, das bedeutet, $D_{Q^n G}$ ist auf H beschränkt, falls $Q^n \geq R_0$.

5. Aus Abschnitt 4.(3) folgt auch: Ist $Q^n \geq R_0$, so ist für alle $z \in H$: $\log \rho_{Q^n G}(z) \leq C' < \infty$.

6. Wir zeigen jetzt: Ist $Q^n \geq R_0$ und $z_0 \in (\partial(Q^n G) \cap K_{\frac{5\delta}{6}}) - \overline{K}_{\frac{4\delta}{6}}$,

so schneidet die Normale N zu $\partial(Q^n G)$ durch z_0 die Menge H. Sei dazu k_z^{ε} wie in Abschnitt 2 dieses Beweises definiert. Wir setzen jetzt $\varepsilon := \varepsilon_0$, $z := \frac{1}{Q^n} z_0$ und der Abkürzung halber $k := k_z^{\varepsilon}$;

Wir werden zeigen, daß $Q^n k \in N \cap H$. Jedenfalls liegt k auf der Normalen zu ∂G durch $\frac{1}{Q^n} z_0$ und damit $Q^n k$ auf der Normalen zu $\partial(Q^n G)$ durch z_0. Um zu beweisen, daß $Q^n k$ in H liegt, zeigen wir zuerst, daß k aus $K_{\frac{\delta}{Q^n}} - \overline{K}_{\frac{\delta}{2Q^n}}$. Dazu schätzen wir ab:

$$\operatorname{dist}(k, \tfrac{1}{Q^n} z_0) \leq \frac{\varepsilon_0}{2} \left|\tfrac{1}{Q^n} z_0\right| < \frac{\delta}{12\, Q^n} \quad \text{da} \quad \varepsilon_0 < \tfrac{1}{6}\delta \text{ und } \delta < 1.$$

Also folgt

$$|k| \leq \left|\tfrac{1}{Q^n} z_0\right| + \left|k - \tfrac{1}{Q^n} z_0\right| \leq \frac{5\delta}{6\, Q^n} + \frac{\delta}{12\, Q^n} < \frac{\delta}{Q^n}$$

$$|k| \geq \left|\tfrac{1}{Q^n} z_0\right| - \left|k - \tfrac{1}{Q^n} z_0\right| \geq \frac{4\delta}{6\, Q^n} - \frac{\delta}{12\, Q^n} > \frac{\delta}{2\, Q^n},$$

mithin liegt k jedenfalls in $K_{\frac{\delta}{Q^n}} - \overline{K}_{\frac{\delta}{2\, Q^n}}$. Nach Konstruktion liegt k in H^* , also liegt k in $(H^* \cap K_{\frac{\delta}{Q^n}}) - \overline{K}_{\frac{\delta}{2Q^n}}$, damit also $Q^n k \in H$.

7. Sei $V^* := K_{\frac{\delta}{2R_0}}$ und seien z_1, z_2 Punkte aus $V^* \cap G$, die von P den gleichen Abstand besitzen. Seien $z^* \in \partial G$ so gewählt, daß $|z_\nu - z_\nu^*| = \rho_G(z_\nu)$, $\nu = 1,2$. Dann existiert jedenfalls ein $Q > 1$

und ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $Q^n z_1^* , Q^n z_2^* \in K_{\frac{5\delta}{6}} - \overline{K}_{\frac{4\delta}{6}}$. Es ist klar, daß $Q^n \geq R_o$ und daß $Q^n \to \infty$, falls $|z_\nu - P|$ gegen 0 geht, $\nu = 1,2$. Nach Abschnitt 6. des Beweises existieren jedenfalls T_1 und T_2 aus H, die auf der Normalen zu $\partial(Q^n G)$ durch $Q^n z_1^*$ bzw. $Q^n z_2^*$ liegen, auf der auch $Q^n z_1$ bzw. $Q^n z_2$ nach Konstrunktion der z_ν^* liegen. Es gilt nun nach (2) Kap. VII,§ 8

$$D_G(z_1,z_2) = D_{Q^n G}(Q^n z_1, Q^n z_2),$$

also

$$D_G(z_1,z_2) = D_{Q^n G}(Q^n z_1, Q^n z_2) \leq D_{Q^n G}(Q^n z_1, T_1) + D_{Q^n G}(T_1,T_2) + D_{Q^n G}(T_2, Q^n z_2) .$$

Da $T_1, T_2 \in H$, folgt nach Abschnitt 4.:

$D_{Q^n G}(T_1,T_2) \leq C$, C unabhängig von T_1 und T_2 und Q^n.

8. Seien $(z_m^1),(z_m^2)$ zwei Folgen aus G, die gegen P konvergieren, und für die gilt $|z_m^1 - P| = |z_m^2 - P|$. Seien zu (z_m^1) bzw. (z_m^2) $Q_m^{n_m}$, T_m^1 und T_m^2 analog wie in Abschnitt 7 gewählt. Zur Abkürzung setzen wir $Q_m := Q_m^{n_m}$; für $m \to \infty$ strebt auch $Q_m \to \infty$.

Es gelte nun für beliebiges, aber festgewähltes m $Q_m z_m^1 \notin H$ und $Q_m z_m^2 \notin H$. Daraus folgt : $\operatorname{dist}(Q_m z_m^1, \partial(Q_m G)) < \operatorname{dist}(T_m^1, \partial(Q_m G))$.

Also ergibt sich nach (4), Satz 14 für hinreichend großes m:

$$D_{Q_m G}(Q_m z_m^1, T_m^1) = \int_{Q_m z_m^1}^{T_m^1} \frac{d S_E}{2 \rho_G} (1 + O(\rho_G)) \leq$$

$$\leq -\frac{1}{2}\left[\log \rho_G(Q_m z_m^1) + \log \rho_G(T_m^1)\right] + C_1$$

$$\leq -\frac{1}{2} \log Q_m - \frac{1}{2} \log \rho_G(z_m^1) + C_1^* .$$

Ist $K > 0$, so folgt für hinreichend großes m

(*) $$D_{Q_m G}(Q_m z_m^1, T_m^1) < -\frac{1}{2} \log \rho(z_m^1) - K.$$

Ebenso verfahren wir mit (z_m^2); daraus folgt jedoch sofort die gesuchte Abschätzung.

9. Es gelte $Q_m z_m^1 \in H$ und $Q_m z_m^2 \in H$. Nach den obigen Ausführungen existiert dann ein $C > 0$, so daß $D_G(z_m^1, z_m^2) = D_{Q_m G}(Q_m z_m^1, Q_m z_m^2) \leq C$, insbesondere gilt dann auch hier unsere gesuchte Abschätzung

10. Es gelte $Q_m z_m^1 \notin H$ und $Q_m z_m^2 \in H$. Dann gilt für $Q_m z_m^1$, T_m^1 die Abschätzung (*). Außerdem ist nach Abschnitt 4 dieses Beweises $D_{Q_m G}(T_m^1, Q_m z_m^2)$ durch C beschränkt.

Durch Anwendung der Dreiecksungleichung erhalten wir hieraus die gewünschte Abschätzung.

q.e.d.

§ 3

Topologische Fortsetzung biholomorpher Funktionen auf den Rand

Die Ergebnisse von Satz 7 und Satz 8 wenden wir jetzt an, um zu zeigen, daß bei streng-pseudokonvexen Gebieten, die relativkompakt im $\mathbb{C}^n$ liegen, biholomorphe Funktionen topologisch auf den Rand fortgesetzt werden können.

Satz 9: Seien $G_1, G_2 \subset\subset \mathbb{C}^n$ streng-pseudokonvexe Gebiete mit C^∞-Rand, sei $\psi : G_1 \to G_2$ eine biholomorphe Abbildung. Dann ist ψ auf den Rand topologisch fortsetzbar.

Beweis: 1. Durch Translationen können wir immer erreichen, daß $0 \in G_1$, $0 \in G_2$ und $\psi(0) = 0$.

2. Seien (z_n^1), (z_n^2) zwei Folgen aus G_1, die gegen einen Punkt $P \in \partial G_1$ konvergieren. Wir behaupten nun, daß auch $(\psi(z_n^1))$, $(\psi(z_n^2))$ gegen einen Punkt $P_2 \in \partial G_2$ konvergieren.
Jedenfalls kann ich durch Hinzunahme von Gliedern immer erreichen, daß $|z_n^1 - P| = |z_n^2 - P|$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.
Zuerst mal ist klar, daß $(\psi(z_n^1))$ und $(\psi(z_n^2))$ keinen Häufungspunkt in G_2 haben, da sonst (z_n^1) und (z_n^2) einen Häufungspunkt in G_1 haben müßten, denn ψ ist eine topologische Abbildung. Weiterhin gilt: Ist $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$, so ist nach Satz 8 für fast alle n

$$D_{G_1}(z_n^1, z_n^2) < -\tfrac{1}{2} \log \varrho_{G_1}(z_n^1) - \tfrac{1}{2} \log \varrho_{G_1}(z_n^2) - K.$$

Da nach (2), Kap VII § 8 die Caratheodory-Metrik invariant gegenüber biholomorphen Abbildungen ist, gilt:
Ist $K > 0$, so ist für fast alle n

$$D_{G_2}(\psi(z_n^1), \psi(z_n^2) < -\tfrac{1}{2} \log \varrho_{G_1}(z_n^1) - \tfrac{1}{2} \log \varrho_{G_1}(z_n^2) - K$$

Nach Satz 1, Satz 2 und Satz 4 existieren Konstanten c_1, c_2 so daß für fast alle n:

$$c_1 \varrho_{G_1}(z_n^\nu) \leq 1 - h_{G_1}(z_n^\nu) = 1 - h_{G_2}(\psi(z_n^\nu) \leq c_2 \varrho_{G_2}(\psi(z_n^\nu)), \quad \nu = 1, 2.$$

Also folgt: Ist $K > 0$, so gilt für fast alle n:

(*) $$D_{G_2}(\psi(z_n^1), \psi(z_n^2)) < -\tfrac{1}{2} \log \varrho_{G_2}(\psi(z_n^1)) - \tfrac{1}{2} \log \varrho_{G_2}(\psi(z_n^2)) - K.$$

Nehmen wir nun an, $(\psi(z_n^1))$ und $(\psi(z_n^2))$ würden nicht gegen den gleichen Punkt $P_2 \in \partial G_2$ konvergieren. Da $\overline{G}_2$ kompakt, existieren jedenfalls Teilfolgen $(\psi(z_n^1)^\nu)$ bzw. $(\psi(z_n^2)^\nu)$, die gegen Punkte P' bzw. P'' $\in \partial G_2$ konvergieren, wobei $P' \neq P''$.
Wegen (*) und Satz 7 ist dies jedoch unmöglich.

3. Wir definieren jetzt $\overline{\psi} : \overline{G}_1 \longrightarrow \overline{G}_2$ mit

$$\overline{\psi}(z) := \begin{cases} \psi(z), & z \in G_1 \\ \bar{z}, & z \in \partial G_1 \end{cases}$$

wobei $\bar{z}$ auf folgender Weise definiert ist: Da $z \in \partial G_1$,

existiert eine Folge (z_n) aus G_1, die gegen $\bar{z}$ konvergiert. $\bar{z} := \lim_{n \to \infty} \psi(z_n)$. Nach den obigen Betrachtungen ist $\bar{\varphi}$ definiert und aus der Definition folgt sofort die Stetigkeit von $\bar{\varphi}$ auf $\bar{G}_1$. Analog definiert man $\overline{(\psi^{-1})}$ und es ist $\overline{(\psi^{-1})}$ stetig auf $\bar{G}_2$. Aus der Definition folgt sofort, daß

$$\overline{(\psi^{-1})} \circ \bar{\varphi} = \mathrm{id}_{\bar{G}_1}$$

$$\bar{\varphi} \circ \overline{(\psi^{-1})} = \mathrm{id}_{\bar{G}_2} ,$$

also ist $\overline{(\psi^{-1})}$ die Umkehrung von $\bar{\varphi}$, $\bar{\varphi}$ ist daher topologisch.

q.e.d.

Damit ist das Hauptresultat der vorliegenden Arbeit gezeigt.

Literaturverzeichnis:

(1) Behnke-Sommer "Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen" 2.Aufl., Berlin 1965

(2) Behnke-Thullen "Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlicher" 2.Aufl., Berlin 1970

(3) H. Cartan "Analytische Funktionen" B.I. Taschenbücher, Mannheim 1966

(4) A. Fadlalla Dissertation Göttingen 1962

(5) H. Grauert Funktionentheorie I,II, und III Vorlesungsausarbeitungen Göttingen 1969/70

(6) Gunning-Rossi "Analytic Functions of several complex variables" Englewood Cliffs, N.J. 1965

(7) W. Kaup "Das Randverhalten holomorpher Automorphismen beschränkter Gebiete" Manuskripta Mathematica 3 (1970)

(8) E. Ramiréz "Ein Divisionsproblem und Randintegraldarstellungen in der komplexen Analysis" Mathematische Annalen 184(1970)

(9) H.-J. Reiffen "Die Caratheodory-metrik als Differentialmetrik" Schriften der Universität Münster, Bd. 26

(10) E. Peschl " Funktionentheorie I " B.I. Taschenbücher Mannheim 1967

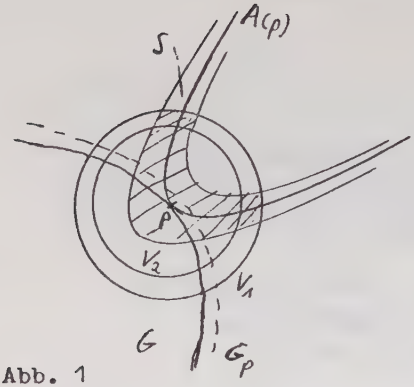

Abb. 1

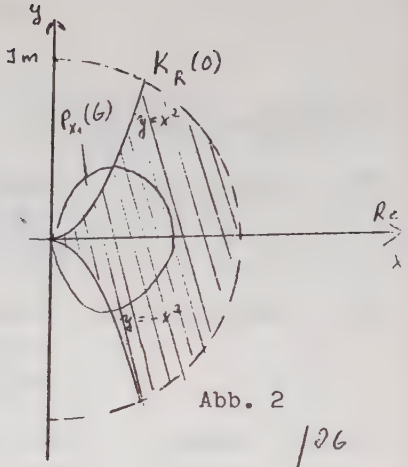

Abb. 2

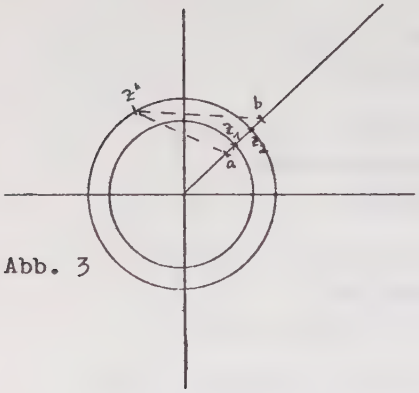

Abb. 3

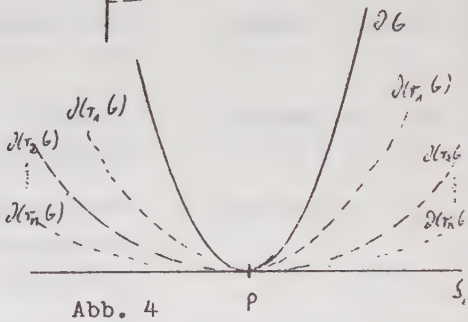

Abb. 4

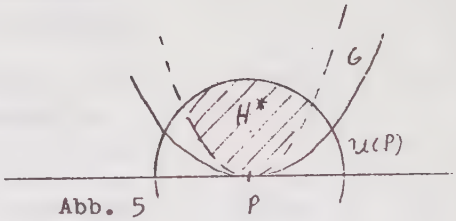

Abb. 5

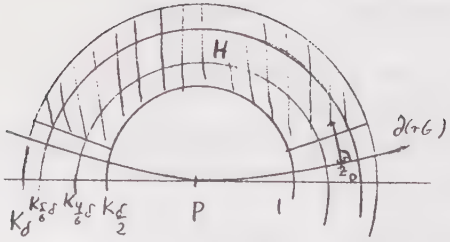

Abb. 7

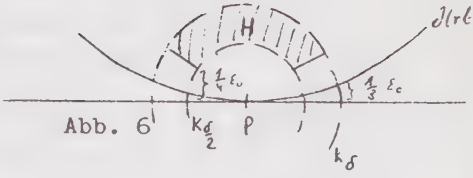

Abb. 6

Lebenslauf

Ich, Norbert Vormoor, wurde am 30. 1. 1947 in Vechta als Sohn des Bauern Franz Vormoor und seiner Ehefrau Maria Vormoor, geb. Zumbrägel geboren.

Nach vierjähriger Volksschulzeit und neunjährigem Besuch des Gymnasium Antonianum in Vechta wurde ich am 15. 4. 66 als Student der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Göttingen immatrikuliert.

Hier legte ich am 21. 10. 68 das Vordiplom und am 5. 2. 71 das Hauptdiplom in Mathematik ab.